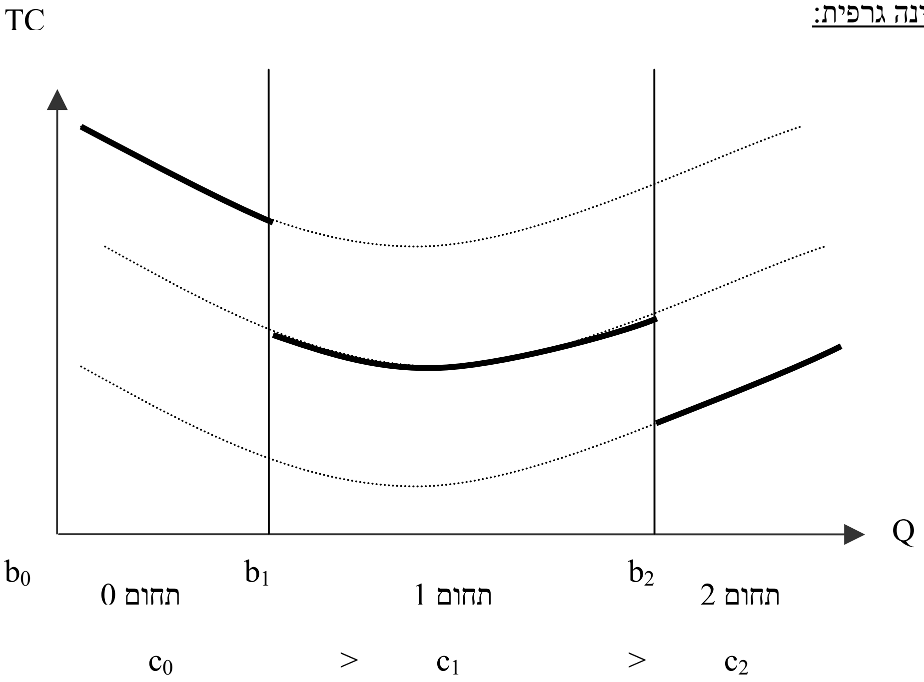
תרגול IV - מודלים עם הנחה לכמויות

הנחה על כל הכמות:

<u>המשמעות:</u> בהתאם לגודל המנה Q, נקבע מחיר ליחידה c, ובמחיר זה נרכשת כל הכמות.

<u>מבחינה גרפית:</u>



<u>רציונל הפתרון:</u>

לכל תחום j מחשבים Q* ובסוף נמצא את ה-Q* שממזער את העלות ליחידת זמן.

<u>הגדרות:</u>

G_j - פונקצית עלות ליחידת זמן בתחום j.

b_j - אבן דרך תחתון של תחום j.

b_{j+1} - אבן דרך עליון של תחום j.

Q_j^0 - גודל מנה אופטימלית ללא מגבלות על תחום j.

Q_j^* - גודל מנה אופטימלית בתחום j עם התחשבות באילוצים.

Q* -גודל מנה אופטימלית.

<u>פונקצית מטרה:</u> $Q^* = \{Q_j^* \mid \min G_j(Q_j^*)\}$

<u>שלבי פתרון:</u>

1. נתחיל בתחום האחרון (c_j הנמוך ביותר).
2. נחשב Q_j^0 בדומה לחישוב של Q*, למשל עבור מודל 3 (קצב יצור סופי וחוסר אסור):

$$Q_j^0 = \sqrt{\frac{2 * A * D}{i * c_j * \left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$

3. אם $b_j < Q_j^0 < b_{j+1}$, אזי $Q_j^* = Q_j^0$ ונעבר לשלב 5.

אם $Q_j^0 < b_j$, אזי $Q_j^* = b_j$ ונעבר לשלב 4.

אם $Q_j^0 > b_{j+1}$, אזי $Q_j^* = b_{j+1}$ ונעבר לשלב 4.

4. j=j-1 וחוזרים לשלב 2.

5. $Q^* = \{Q_j^* \big| \min G_j(Q_j^*)\}$

<u>תרגיל כיתה 1:</u>

קצב הביקוש השנתי לפריט הוא קבוע λ=120,000 יחידות. קצב היצור השנתי הנו P=600,000 יחידות. כמו כן נתון שהריבית על המלאי i=10%, העלות הקבועה ליצור מנה K=1,690 ₪ ועלות חוסר אינסופית (אסור חוסר). העלות ליחידה נקבעת לפי הכמות המיוצרת וניתנת על כל המנה (הנחה על כל הכמות):

תחום j	עלות ליחידה c_j	כמות
0	6	0≤Q<10,000
1	5.8	10,000≤Q<30,000
2	5.7	30,000≤Q

א. מה גודל סידרת היצור האופטימלית?

ב. מסתבר כי מחסן החברה מוגבל ויכול לאחסן 23,700 יחידות ולא יותר. מה תהיה תכנית היצור האופטימלית כעת?

<u>פתרון תרגיל 1:</u>

העלות נקעת ע"פ גודל המנה (הנחה על כל הכמות).

א. המודל המתואר: קצב יצור סופי, חוסר אסור: $Q_j^0 = \sqrt{\dfrac{2 * A * D}{i * c_j * \left(1 - \dfrac{D}{P}\right)}}$

$$TC(Q,c) = \frac{AD}{Q} + cD + \frac{1}{2} icQ\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

תחום אחרון- j=2, c_2=5.7:

$$Q_2^0 = \sqrt{\frac{2AD}{ic_2\left(1-\dfrac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2*120,000*1,690}{0.1*5.7*\left(1-\dfrac{120,000}{600,000}\right)}} = 29,824 < 30,000 \Rightarrow Q_2^* = 30,000$$

תחום j=1, c_1=5.8:

$$Q_1^0 = \sqrt{\frac{2AD}{ic_1\left(1-\dfrac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2*120,000*1,690}{0.1*5.8*\left(1-\dfrac{120,000}{600,000}\right)}} = 29,566$$

$$10,000 < 29,566 < 30,000 \Rightarrow Q_1^* = 29,566$$

כעת עוברים לשלב 5 - השוואה בין העלויות עבור הכמויות שהתקבלו:

$$Q_2^* = 30,000 \Rightarrow TC(30,000;5.7) = 697,600$$
$$Q_1^* = 29,566 \Rightarrow TC(29,566;5.8) = 709,718$$

לכן נובע שהמדיניות האופטימאלית הינה: $Q^* = Q_2^* = 30,000$.

ב. האילוץ- $I_{max}<23,700$:

חישוב I_{max} עבור $Q=30,000$:

$$I_{max} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right) = 30,000\left(1-\frac{120,000}{600,000}\right) = 24,000 > 23,700$$

לא עומדים באילוץ.

נחשב Q_{max}: כמות מקסימאלית שעומדת באילוץ של המלאי:

$$H = Q\left(1-\frac{\lambda}{P}\right) = Q\left(1-\frac{120,000}{600,000}\right) > 23,700 \Rightarrow Q > \frac{23,700}{1-\dfrac{120,000}{600,000}} = 29,625 = Q_{max}$$

שזוהי כמות שנמצאת בתחום 1, אך גדולה מ- $Q_1^* = 29,566$.

כעת יש לנו שתי אפשרויות - לייצר כמות של 29,566 או לייצר 30,000 ולזרוק את הפריטים שיעברו את סף אילוץ המלאי.

אנומליה - מצב בו כדאי לבצע הזמנה / ייצור מעל לדרוש ולזרוק את העודף.

נשווה עלויות בשתי האפשרויות. הנמוכה היא שתיבחר.

1- $Q_1^* = 29,566 \Rightarrow TC(29,566;5.8) = 709,718$

2- $Q^*=30,000$, $Q_{max}=29,625$, $c=5.7$, $T= Q_{max}/D$:

$$G(Q^*,Q_{max},c) = \frac{AD}{Q_{max}} + \frac{cQ^*}{\dfrac{Q_{max}}{\lambda}} + \frac{1}{2}icQ_{max}\left(1-\frac{D}{P}\right)$$

$$G(30,000;29,625;5.7) = \frac{AD}{29,625} + \frac{5.7*30,000}{\dfrac{29,625}{\lambda}} + \frac{1}{2}\times i\times 5.7\times 29,625\left(1-\frac{D}{P}\right) = 706,258.3 < 709,718$$

קיבלנו כי יש אנומליה: כדאי לייצר 30,000 ולזרוק (29625-30,000) במחזור.

<u>יש לשים לב:</u>

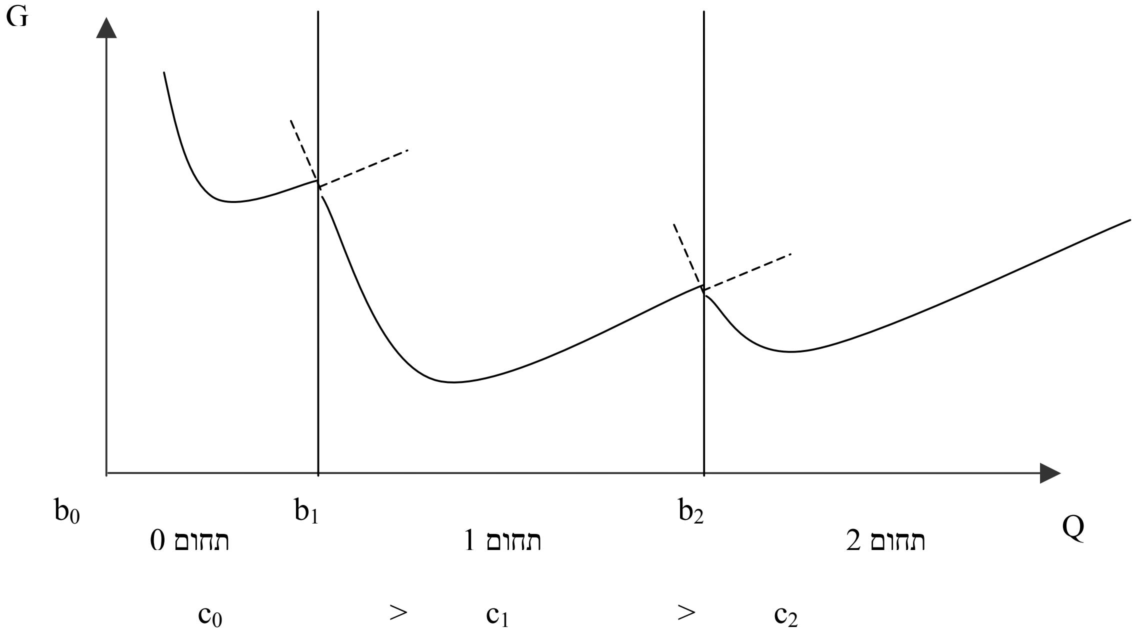
קיבלנו שגם הכמות האופטימאלית Q_{max} גדולה מכמות אופטימאלית בתחום 1, וגם שעלות למחזור לכמות האופטימאלית $TC(Q_{max})$ גדולה מעלות למחזור של הכמות האופטימאלית בתחום 1. לכן השוונו את $TC(Q_1^*,5.8)$ עם $TC(30,000;29,625;5.7)$.

אם היה מתקבל ש-Q_1 לא עומד באילוץ אז היה צריך להשוות בין $TC(30,000;29,625;5.7)$ לבין $TC(Q_{max},5.8)$.

<u>הנחה אינקרמנטלית:</u>

<u>המשמעות:</u> בהתאם לגודל המנה Q, נקבע מחיר ליחידה c, אך היא תקפה רק לחלק מהמנה.

<u>מבחינה גרפית:</u>



<u>הגדרות:</u>

MC (b_j) - ערך/עלות של b_j היחידות הראשונות.

MC (Q_j) - ערך/עלות של Q_j יחידות, כאשר Q_j נופל בתחום j.

נוסחה רקורסיבית: $MC(Q_j) = MC(b_j) + c_j * (Q_j - b_j)$

עלות ליחידת זמן (עבור מודל של יצור אינסופי וחוסר אסור) תהיה:

$$TC(Q_j) = \frac{AD}{Q_j} + MC(Q_j)\frac{D}{Q_j} + \frac{1}{2}iMC(Q_j)$$

מתוך הנוסחה הרקורסבית:

$$TC(Q_j) = \frac{AD}{Q_j} + \frac{D}{Q_j}\left[MC(b_j) + c_j(Q_j - b_j)\right] + \frac{1}{2}i\left[MC(b_j) + c_j(Q_j - b_j)\right] \quad (1)$$

לאחר גזירה לפי Q והשוואה לאפס נקבל : $Q_j^* = \sqrt{\frac{2D\left[A + MC(b_j) - c_j b_j\right]}{ic_j}}$. (2)

<u>אופן הפתרון:</u>

1) חישוב Q_j^* לכל תחום j ע"פ נוסחה 2.

2) חישוב TC(Q_j) לפי נוסחה 1 רק עבור Q_j^* שנפלו בתחום שלהם.

3) בחירת Q_j^* שעבורו מתקבלת עלות מינימלית ליחידת זמן $\Leftarrow$ Q^*.

<u>תרגיל כיתה 2:</u>

חנות עורכת מכרז לרכישת עטים. כיום קונה החנות עטים מספק א' בכדי לספק ביקוש של 1000 יחידות בשנה. ספק ב' רוצה להתחרות בספק א'. הוא שוכר בלש פרטי שיגלה מה התנאים שספק א' מציע לחנות. הבלש הצליח להשיג את הפרטים הבאים: A=100 י"כ, i =0.02 ריבית לשנה, b=0.

ספק א' מעניק לחנות הנחה שולית לכמויות:

תחום	2000-0	3000-2001	$3001\text{-}b_3$	$(b_3+1)\text{-}\infty$
עלות	2.6	c_1	2	1.8

כמו כן, גילה כי $Q_1^* = 6{,}396.02$, $Q_3^* = 11{,}785.11$.

א. מה מנת ההזמנה שדורשת החנות (Q*)?

ב. ספק ב' רוצה להציע רכישה ע"פ כמות קבועה. איזו עלות (קבועה) ליחידה עליו להציע בכדי לזכות במכרז?

<u>פתרון תרגיל 2:</u>

א. מה Q*?

נמלא טבלת עזר למציאת עלות משתנה לח"ג:

תחום	c_j	b_{j+1}
0	2.6	2000
1	c_1	3000
2	2	b_3
3	1.8	∞

<u>נחשב את c_1 ואת b_3:</u>

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2D\left(A+MC\left(b_1\right)-c_1b_1\right)}{ic_1}} = 6396.02$$

נעלה בריבוע: $\frac{2*1000*\left(100+5200-c_1*2000\right)}{0.02*c_1} = 40109071.84 \Rightarrow c_1 = 2.2$

$MC(b_2)=MC(b_1)+1000*c_1=5200+1000*2.2=7400$

$MC(b_3)=MC(b_2)+2*(b_3-3000)=1400+2*b_3$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2D\left(A+MC\left(b_3\right)-c_3b_3\right)}{ic_3}} = 11785.11 \Rightarrow b_3 = 5000$$

<u>פתרון ע"פ השלבים:</u>

$$Q_0^* = \sqrt{\frac{2D\left(A+MC\left(b_0\right)-c_0b_0\right)}{ic_0}} = \sqrt{\frac{2AD}{2.6i}} = 1961 \rightarrow \text{בתחום}$$

$Q_1^* = 6396 \rightarrow$ לא בתחום

$Q_2^* = 8660 \rightarrow$ לא בתחום

$Q_3^* = 11785 \rightarrow$ בתחום

נשווה עלויות ליחידת זמן עבור תחומים 0 ו3- בלבד: (*התוצאה נכונה, לאחר בדיקה*)

$$TC(Q_j) = \frac{AD}{Q_j} + \frac{D}{Q_j}\left[MC(b_j) + c_j(Q_j - b_j)\right] + \frac{1}{2}i\left[MC(b_j) + c_j(Q_j - b_j)\right]$$

TC(Q_0^*)=2702

TC(Q_3^*)=2248

$Q^* = Q_3^* = 11785 \Leftarrow$

ב. מציאת c אלטרנטיבי: (איזה c קבוע היינו בוחרים כך שייתן עלות לי"ז זהה)

$TC(optim) = \sqrt{2ADic} + cD = 4000\sqrt{c} + 100(\sqrt{c})^2 \le TC($ספק א'$)$=2248

$\Rightarrow \sqrt{c} = 1.47 \Rightarrow c \le 2.1609$

מספר מוצרים עם אילוצים – כופלי לגרנג'

תרגיל:

מפעל מנהל מלאי של שני מוצרים:

פריט	ביקוש שנתי (יח')	עלות הזמנה (₪)	עלות אחזקת מלאי (₪)
1	2400	1200	4
2	2000	160	4

א. שני המוצרים מוחזקים במחסן עליו משלם המפעיל דמי שכירות שנתיים. יש לקבוע מדיניות מלאי אופטימלית, בהנחה שאין אפשרות להחזיק במחסן כמות של יותר מ- 2000 יחידות עבור שני המוצרים בכל נקודת זמן.

ב. מהי העלות השנתית של אילוץ זה?

ג. הוגשה למפעל הצעה לשכור מחסן קטן יותר, אשר בו ניתן לאחסן עד 1000 יחידות בלבד. דמי השכירות נמוכים מדמי השכירות של המחסן הקיים ב- X ₪ לשנה. מהו X עבורו כדאי למפעל לעבור למחסן החדש?

פתרון:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2A_1D_1}{h}} = \sqrt{\frac{2*1200*2400}{4}} = 1200 = I_{1\max}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2A_2D_2}{h}} = \sqrt{\frac{2*160*2000}{4}} = 400 = I_{2\max}$$

$$Q_1^* + Q_2^* < 2000$$

ב. האילוץ לא מאלץ ולכן העלות השנתית שלו היא 0.

ג.

$$TC(Q_1,Q_2) = \frac{A_1D_1}{Q_1} + \frac{h_1Q_1}{2} + c_1D_1 + \frac{A_2D_2}{Q_2} + \frac{h_2Q_2}{2} + c_2D_2 + \lambda\left(Q_1 + Q_2 - 1000\right)$$

$$\frac{d\,TC(Q_1,Q_2)}{d\,Q_1} = -\frac{A_1D_1}{Q_1^2} + \frac{h_1}{2} + \lambda = 0$$

$$\frac{d\,TC(Q_1,Q_2)}{d\,Q_2} = -\frac{A_2D_2}{Q_2^2} + \frac{h_2}{2} + \lambda = 0$$

$$\frac{d\,TC(Q_1,Q_2)}{d\,\lambda} = Q_1 + Q_2 - 1000 = 0$$

$$\lambda = \frac{A_1D_1}{Q_1^2} - \frac{h_1}{2} = \frac{A_2D_2}{Q_2^2} - \frac{h_2}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{A_1D_1}{A_2D_2} = \frac{2400*1200}{2000*160} = 9 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_1}{Q_2} = 3 \\ Q_1 + Q_2 - 1000 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_1 = 750, Q_2 = 250$$

$$TC(750,250) =$$
$$= \frac{1200*2400}{750} + \frac{4*750}{2} + c_1D_1 + \frac{160*2000}{250} + \frac{4*250}{2} + c_2D_2 = 7120 + c_1D_1 + c_2D_2$$

$$TC(1200,400) =$$
$$= \frac{1200*2400}{1200} + \frac{4*1200}{2} + c_1D_1 + \frac{160*2000}{400} + \frac{4*400}{2} + c_2D_2 = 6400 + c_1D_1 + c_2D_2$$

$$TC(750,250) - TC(1200,400) = 720$$

כלומר אם ההפרש בין המחסן הגדול לקטן הוא 720 ₪ או יותר, כדאי לעבור למחסן הקטן, אחרת העלות שנשלם כדי לעמוד באילוץ תגרום לכך שזה לא יהיה כדאי לעמוד בו.